CONCURSUL NAŢIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIŢIA A X-A / 22-24 MARTIE 2013

SUBIECTE CLASA A IX-A

Subiectul I (30p)

a) Să se reprezinte grafic funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{2a+1}{3}$ care trece prin punctul $A(0,-1)$.

b) Să se determine $n\in\mathbb{N}$ astfel încât să aibă loc relaţia $f(0)+f(1)+...+f(n)=54$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$.

c) Să se calculeze $E=\left[\frac{f(0)-f(1)+f(2)-...-f(2013)}{8}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$.

Subiectul II (30p)

1. Se dau funcţiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ dacă } x\le 1\\ (m+2)x-1, \text{ dacă } x>1.\end{cases}$

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f_m să fie strict descrescătoare pe $(1,\infty)$.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f_m să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}x^2=2x+y\\ y^2=x+2y.\end{cases}$

Subiectul III (30p)

Într-un paralelogram $ABCD$ cu $AB=6$, $AD=4$, $BD=8$ se notează cu G centrul de greutate al triunghiului ABD şi I centrul cercului înscris al triunghiului BCD. Dacă M aparţine segmentului BD cu $\frac{BM}{MD}=k$, să se afle k astfel încât punctele G, M, I să fie coliniare.

Din oficiu 10p
Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

Probleme propuse de:
Prof. Dr. Radu-Octavian Vîlceanu
Prof. Dorel Stoenescu
Prof. Speranţa Modrea
Prof. Dumitru Neagu

CONCURSUL NAŢIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIŢIA A X-A / 22-24 MARTIE 2013

BAREM CLASA A IX-A

Subiectul I (30p)

a) $a=1$ **(5p)**, reprezentarea grafică **(5p)**,

b) $f(0)+f(1)+...+f(n)=\frac{(n+1)(n-2)}{2}$ **(5p)**, $\frac{(n+1)(n-2)}{2}=54$, $n=11$ **(5p)**,

c) $f(0)-f(1)+f(2)-...-f(2013)=-1007$ **(5p)**, $E=-126$ **(5p)**.

Subiectul II (30p)

1.a) $m+2<0\Rightarrow m\in(-\infty,-2)$ **(5p)**, **b)** $\begin{cases} m+2>0 \\ f(1)\le m+1 \end{cases}$ **(5p)**, finalizare **(5p)**.

2. $\begin{cases} x^2+y^2=3(x+y) \\ x^2-y^2=x-y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+y^2=3(x+y) \\ (x-y)(x+y-1)=0 \end{cases}$, **(3p)**

I. $\begin{cases} x^2+y^2=3(x+y) \\ x-y=0 \end{cases}$ cu soluţiile $(0,0)$ şi $(3,3)$, **(6p)**

II. $\begin{cases} x^2+y^2=3(x+y) \\ x+y-1=0 \end{cases}$ cu soluţiile $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ şi $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, **(6p)**

Subiectul III (30p)

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)$, $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OD}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OC}$, unde O este un punct arbitar în planul paralelogramului **(6p)**, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+k}\left(\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OD}\right)$ **(2p)**,

$\overrightarrow{GM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2-k}{3(k+1)}\overrightarrow{OB}+\frac{2k-1}{3(k+1)}\overrightarrow{OD}$ **(4p)**, $\overrightarrow{GI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{9}\overrightarrow{OD}$ **(2p)**,

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$ **(2p)**, $\overrightarrow{GI}=-\frac{7}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$ **(2p)**,

G, M, I coliniare $\Leftrightarrow\overrightarrow{GM}$ şi $\overrightarrow{GI}$ coliniari $\Leftrightarrow\frac{-\frac{7}{9}}{-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{2-k}{3(k+1)}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2k-1}{3(k+1)}}$ **(6p)**, finalizare **(6p)**.

Din oficiu 10p
Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

Probleme propuse de:
Prof. Dr. Radu-Octavian Vîlceanu
Prof. Dorel Stoenescu
Prof. Speranţa Modrea
Prof. Dumitru Neagu

CONCURSUL NAŢIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIŢIA A X-A / 22-24 MARTIE 2013

SUBIECTE CLASA A X-A

Subiectul I (30p)

a) Să se rezolve ecuația $\log_{2013}(\operatorname{tg} x)+\log_{2013}(\operatorname{ctg} x)=0$, unde $x\in(0,1)$.

b) Determinaţi $a=\log_2 \operatorname{Re} z$, $b=\log_2 |\operatorname{Im} z|$ şi $c=\log_2\left(z\cdot\bar{z}\right)-\log_2 5$, unde z este o rădăcină a ecuaţiei $z^2-8z+20=0$.

c) Calculați suma $S=\sum_{k=1}^{2013}[\lg k]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x*.

Subiectul II (30p)

1. Găsiți $x>2$, știind că numerele $\log_2(x-2)$, $\log_2 x$ și $\log_2(x+4)$ sunt în progresie aritmetică.

2. Să se rezolve ecuația: $\left(\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\left(\sqrt{2}+2\right)^x=\left(\sqrt{2}+3\right)^x+x-2$.

3. Demonstrați: $\left(C_3^0\right)^2+\left(C_3^1\right)^2+\left(C_3^2\right)^2+\left(C_3^3\right)^2=\frac{1}{5}\left(C_5^3\right)^2$.

Subiectul III (30p)

Se consideră triunghiul *ABC* astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=-\vec{i}+2\vec{j}$ şi *A* originea sistemului de axe. Determinaţi:

a) lungimea medianei din *A*;

b) ecuaţia medianei din *A*;

c) vectorul $\overrightarrow{BG}$, unde *G* este centrul de greutate al triunghiului *ABC*.

Din oficiu 10p
Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

Probleme propuse de:
Prof. Dr. Radu-Octavian Vîlceanu
Prof. Dorel Stoenescu
Prof. Speranţa Modrea
Prof. Dumitru Neagu

CONCURSUL NAŢIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIŢIA A X-A / 22-24 MARTIE 2013

BAREM CLASA A X-A

Subiectul I (30p)

a) $\log_{2013}\left(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x\right)=0\Leftrightarrow\log_{2013}1=0$ **(4p)**, soluţia **(1p)**,

b) $z_1=4+2i$, $z_2=4-2i$ **(5p)**, $a=2$ **(3p)**, $b=1$ **(3p)**, $c=\log_2 20-\log_2 5=2$ **(4p)**,

c) $S=\sum\limits_{k=1}^{9}[\lg k]+\sum\limits_{k=10}^{99}[\lg k]+\sum\limits_{k=100}^{999}[\lg k]+\sum\limits_{k=1000}^{2013}[\lg k]$ **(5p)**,

$S=9\cdot 0+90\cdot 1+900\cdot 2+1014\cdot 3=4932$ **(5p)**

Subiectul II (30p)

a) $2\log_2 x=\log_2(x-2)+\log_2(x+4)$ **(3p)**, $\log_2 x^2=\log_2\left[(x-2)(x+4)\right]$ **(3p)**,

$x^2=(x-2)(x+4)$ **(2p)**, $sol.\ x=4$ **(2p)**

b) $x=2$ soluţie **(2p)**, $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+3}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+3}\right)^x=1+\frac{x-2}{\left(\sqrt{2}+3\right)^x}$ **(1p)**,

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+3}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+3}\right)^x$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ **(2p)**,

Pentru $x>2\Rightarrow 1+\frac{x-2}{\left(\sqrt{2}+3\right)^x}>1=f(2)>f(x)$ **(2p)**,

Pentru $x<2\Rightarrow 1+\frac{x-2}{\left(\sqrt{2}+3\right)^x}<1=f(2)<f(x)$ **(2p)**, finalizare **(1p)**

c) $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ **(2p)**, $\left(C_3^0\right)^2+\left(C_3^1\right)^2+\left(C_3^2\right)^2+\left(C_3^3\right)^2=1^2+3^2+3^2+1^2=20$ **(4p)**,

$\frac{1}{5}\left(C_5^3\right)^2=\frac{1}{5}\cdot 10^2=20$ $C_5^3=10$, $20=20$, adevărat **(4p)**

Subiectul III (30p)

a) Fie M mijlocul segmentului BC, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ **(3p)**, $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\vec{i}+\frac{5}{2}\vec{j}$ **(3p)**,

$AM=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$ **(4p)**, **b)** $M\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, $A(0,0)$, $(x_A-x_M)(y-y_M)=(y_A-y_M)(x-x_M)$ **(5p)**, finalizare **(5p)**,

c) $A(0,0)$, $B(4,3)$, $C(-1,2)$, $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=1$, $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{5}{3}$ **(5p)**

$\overrightarrow{BG}=(x_G-x_B)\vec{i}+(y_G-y_B)\vec{j}$ **(3p)**, finalizare **(2p)**

Din oficiu 10p
Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

Probleme propuse de:
Prof. Dr. Radu-Octavian Vîlceanu
Prof. Dorel Stoenescu
Prof. Speranţa Modrea
Prof. Dumitru Neagu

CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIȚIA A X-A / 22-24 MARTIE 2013

SUBIECTE CLASA A XI-A

Subiectul I (30p)

a) Determinați $x\in\mathbb{R}$ astfel ca matricea $\begin{pmatrix} x & 2^x+3 & 4 \\ 5 & 2x & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ să fie simetrică.

b) Se consideră mulțimile $X_1=\{a,b,c\}$, $X_2=\{c,d,e\}$, $X_3=\{b,d,e,f\}$ și matricea A cu trei linii și trei coloane cu elementele $a_{ij}=\left|X_i\cap X_j\right|$, unde $|M|$ reprezintă numărul elementelor mulțimii M. Determinați matricea A. Care este urma acesteia ?

c) Rezolvați ecuația $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & 1 & & \\ 1 & \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix} & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$, (sunt 2013 determinanți).

Subiectul II (30p)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x-1, \text{dacă } x<0 \\ x^2+x+a, \text{dacă } x\geq 0 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine a astfel încât funcția f să fie continuă în $x_0=0$.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_1=-1$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+1}{x^2+x}$.

Subiectul III (30p)

1. Fie $f:[1,3]\to[2,4]\cup[5,9]$ o funcție continuă astfel încât $f(2)=2$. Să se arate că

a) f nu este surjectivă;

b) f nu este strict monotonă.

2. Fie ABC un triunghi cu lungimile laturilor a, b, c iar x un număr real strict pozitiv. Definim $M(x)$ mulțimea punctelor din planul triunghiului situate la distanța mai mică sau egală cu x față de triunghiul ABC, în exteriorul acestuia. Notăm $S(x)$ aria mulțimii $M(x)$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{A(x)}{x^2}$.

Din oficiu 10p
Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

Probleme propuse de:
Prof. Dr. Radu-Octavian Vîlceanu
Prof. Dorel Stoenescu
Prof. Speranța Modrea
Prof. Dumitru Neagu

CONCURSUL NAŢIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIŢIA A X-A / 22-24 MARTIE 2013

BAREM CLASA A XI-A

Subiectul I (30p)

a) $2^x+3=5$ **(3p)**, $x=1$ **(3p)**

b) determinarea mulţimilor $X_i \cap X_j$ **(6p)**, $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **(4p)**, $\mathrm{Tr}(A)=10$ **(4p)**

c) se demonstrează prin inducţie că $x=2014$ **(10p)**

Subiectul II (30p)

a) f continuă în $x_0=0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)$ **(4p)**, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=a$, $f(0)=a$ **(4p)**, finalizare **(2p)**

b) $y-f(x_1)=f'(x_1)\cdot(x-x_1)$ **(4p)**, $f(-1)=\dfrac{1-e}{e}$, $f'(-1)=\dfrac{1}{e}$ **(4p)**, finalizare **(2p)**

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2+x}$ **(2p)**, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$ **(5p)**,

finalizare **(3p)**

Subiectul III (30p)

1. a) f continuă $\Rightarrow f$ are proprietatea Darboux $\Rightarrow f([1,3])$ interval **(5p)**.

Cum $f(2)=2 \Rightarrow \mathrm{Im}(f)\subseteq[2,4] \Rightarrow f$ nu este surjectivă **(5p)**

b) Dacă f este strict crescătoare $\Rightarrow f(1)<f(2)=2$, dar $f(1)\geq 2$, contradicţie **(5p)**.

Dacă f este strict descrescătoare $\Rightarrow f(3)<f(2)=2$, dar $f(3)\geq 2$, contradicţie **(5p)**.

2. Deoarece $x\to\infty$, atunci $M(x)$ este formată din trei dreptunghiuri ce au câte o latură de lungime a, b, c, iar cealaltă latura de lungime x. În plus, $M(x)$ mai conţine trei sectoare de cerc cu raza r **(4p)**. Suma ariilor acestor sectoare de cerc este egală cu πx^2, justificare **(2p)**.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{A(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(a+b+c)+\pi x^2}{x^2}=\pi$ **(4p)**.

Din oficiu 10p
Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

Probleme propuse de:
Prof. Dr. Radu-Octavian Vîlceanu
Prof. Dorel Stoenescu
Prof. Speranţa Modrea
Prof. Dumitru Neagu

CONCURSUL NAŢIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIŢIA A X-A / 22-24 MARTIE 2013

SUBIECTE CLASA A XII-A

Subiectul I (30p)

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=7$ şi $a_7=37$. Să se calculeze suma primilor zece termeni ai progresiei.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7-x$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot ....\cdot f(7)$.

3. Să se rezolve ecuaţia $2^{\sqrt{x-1}}=4$.

4. Să se calculeze $C_7^5-C_6^5-C_6^4$.

5. Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât distanţa dintre punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,a)$ să fie egală cu 5.

6. Să se calculeze aria unui triunghi echilateral care are lungimea înălţimii egală cu $3\sqrt{3}$.

Subiectul II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi funcţia $f:M_3(\mathbb{R})\to M_3(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2-3X+I_3$, unde $X^2=X\cdot X$.

a) Să se calculeze $\det(I_3+B)$.

b) Să se demonstreze că $f(A)=I_3+B$.

c) Să se arate că $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$, unde $(f(A))^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

2. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x\circ x=x*x$.

b) Să se determine numărul întreg a care are proprietatea că $x\circ a=3$, $\forall x\in\mathbb{Z}$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x*(y+1)=4\\(x-y)\circ 1=5\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

Subiectul III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+1)e^x-1$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=(x+1)^2\cdot e^x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abcisă $x_0=0$.

c) Să se arate că $xf(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{\sqrt{x+1}}$.

a) Să se determine $\int\left(x+\sqrt{x}\right)dx, x>0$.

b) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie în jurul axei Ox a graficului funcţiei f_1.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f_{2013}(x)\leq\dfrac{1}{2014}$.

Din oficiu 10p
Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

Probleme propuse de:
Prof. Dr. Radu-Octavian Vîlceanu
Prof. Dorel Stoenescu
Prof. Speranţa Modrea
Prof. Dumitru Neagu

CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIȚIA A X-A / 22-24 MARTIE 2013

BAREM CLASA A XII-A

Subiectul I

1. $a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow r = 5$ **(2p)**, $a_{10} = 52$ **(1p)**, $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 295$ **(2p)**

2. $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(7) = 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 0 = 0$ **(5p)**

3. $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ **(1p)**, $\sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x = 5 > 1$ **(4p)**

4. $C_7^5 - C_6^5 - C_6^4 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} - \frac{6!}{1! \cdot 5!} - \frac{6!}{2! \cdot 4!}$ **(2p)**, finalizare **(3p)**

5. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{9 + (a+1)^2}$ **(2p)**, $25 = 9 + (a+1)^2 \Rightarrow a = 3$ sau $a = -5$ **(3p)**

6. $h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l = 6$ **(2p)**, $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ sau $S = \frac{l \cdot h}{2} = 9\sqrt{3}$ **(3p)**

Subiectul II

1.a) $I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(2p)**, $\det(I_3 + B) = 1$ **(3p)**, **b)** $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

(2p), $f(A) = A^2 - 3A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(3p)**, **c)** $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(1,5p)**,

$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$ **(1,5p)**, $(f(A))^3 = (I_3 + B)^3 = I_3 + 3B + 3B^2 + B^3$, finalizare **(2p)**

2. a) $(x-3)^2 + 3 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$ **(3p)**, $x_1 = 3 \in \mathbb{Z}$, $x_2 = 5 \in \mathbb{Z}$ **(2p)**, **b)** $a = 3$ **(5p)**,

c) $\begin{cases} x + (y+1) - 3 = 4 \\ (x - y - 3)(1-3) + 3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **(2,5p)**, finalizare **(2,5p)**

Subiectul III

1.a) $f'(x) = (x^2+1)'e^x + (x^2+1)(e^x)'$ **(3p)**, finalizare **(2p)**, **b)** $f(x_0) = 0$ **(1p)**, $f'(x_0) = 1$ **(1p)**, $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ **(2p)**, finalizare **(1p)**

c) $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare iar $f(0) = 0$. Rezultă că $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0)$ și $f(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$ **(4p)**. Finalizare **(1p)**

2.a) $\int \left(x + \sqrt{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$ **(5p)**, **b)** $V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx$ **(1p)**,

$V = \pi \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \pi \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$ **(2p)**, finalizare **(2p)**

c) $\sqrt{x+1} \geq 1, \forall x \in [0,1] \Rightarrow \frac{x^{2013}}{\sqrt{x+1}} \leq x^{2013}, \forall x \in [0,1]$ **(2,5p)**, $\int_0^1 f_{2013}(x) dx \leq \int_0^1 x^{2013} dx = \frac{1}{2014}$ **(2,5p)**

Din oficiu 10p
Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

Probleme propuse de:
Prof. Dr. Radu-Octavian Vîlceanu
Prof. Dorel Stoenescu
Prof. Speranța Modrea
Prof. Dumitru Neagu